



PS2 – Poster-10



Новые эффективные рекурсивные алгоритмы оценивания состояния, управляемости и наблюдаемости больших электроэнергетических систем

А.В. ЖУКОВ¹, М.Ш. МИСРИХАНОВ², В.Н. РЯБЧЕНКО²
ОАО «СО ЕЭС»¹, ОАО «ФСК ЕЭС»²

Россия

rvn@mes-centra.ru

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Большая электроэнергетическая система, оценивание состояния, наблюдаемость и управляемость, ленточная матрица, аннулятор, рекурсивный алгоритм, вычислительная эффективность.

1 ВВЕДЕНИЕ

Управляемость и наблюдаемость режима энергосистемы являются ключевыми свойствами при решении большого количества задач регулирования и управления. Оценка этих свойств в темпе переходных процессов достаточно трудна в алгоритмическом аспекте. Поэтому разработка эффективных вычислительных процедур для оценивания состояния, управляемости и наблюдаемости энергосистемы как многомерной динамической системы является достаточно актуальной. Рассмотрим большую энергетическую систему, заданную уравнениями

$$(1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y = Cx(t),$$

где $x \in R^n$ – состояние, $u \in R^r$ – управление, $y \in R^m$ – выход, $\text{rank } B = r$, $\text{rank } C = m$.

Для системы (1) в силу принципа дуальности алгебраические методы проверки свойств управляемости и наблюдаемости аналогичны [1]. Следуя этому принципу, сосредоточим свое внимание на задаче исследования управляемости, а конечные результаты дуально будем распространять на задачу анализа наблюдаемости.

Для анализа управляемости системы (1) чаще всего используются ранговый критерий управляемости Калмана [3, 4] и модальный¹ критерий (тест) Попова-Белевича-Хотиса (РВН-test²) [5].

Использование рангового критерия в некоторых случаях приводит к ложным выводам о неуправляемости системы вследствие увеличения числа обусловленности анализируемой матрицы [6, 7]. В этом случае РВН-test более эффективен, хотя для его использования необходимо вычислять собственные значения анализируемой системы, что зачастую также приводит к плохо обусловленной задаче.

По мнению авторов, к наиболее общему подходу, позволяющему с единых позиций исследовать свойство управляемости систем (1) относятся ленточные критерии, описанные в [6, 7]. Однако, несмотря на все достоинства данных критериев [6, 7], основным недостатком их является существенное увеличение размеров ленточных матриц управляемости. На это было обращено внимание известным французским ученым М. Малабре в его отзыве на работу одного из авторов [7].

¹ Часто говорят: «спектральный» или «частотный».

² Термин в англоязычной литературе.

В данной работе на основе ленточных критериев управляемости и наблюдаемости [6, 7] строятся рекурсивные тесты (алгоритмы) на управляемость и наблюдаемость, позволяющие существенно понизить вычислительные затраты для систем (1) большой размерности.

2 ЛЕНТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

Приведем ленточный критерий управляемости системы (1) [6, 7].

Критерий 1. Энергосистема (1) полностью управляемая, если и только если ленточная матрица управляемости

$$(2) \quad C_{\text{band}} = \begin{pmatrix} B_L^\perp A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B_L^\perp & B_L^\perp A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_L^\perp & B_L^\perp A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_L^\perp \end{pmatrix} \in R^{(n-r+1)(n-r) \times (n-r+1)(n-1)}$$

имеет полный ранг по строкам³.

Здесь $B_L^\perp$ – левый аннулятор максимального ранга матрицы B , являющийся максимальным решением алгебраического однородного уравнения [1, 8, 9]

$$(3) \quad XB = 0,$$

т.е. $\text{rank } X = n - r$.

Левый аннулятор (иногда называемый левым делителем нуля) не единственен и существует у любых числовых матриц с неполным рангом по строкам [10, 11]. Все множество левых делителей нуля матрицы B (не обязательно полного строчного ранга) могут быть образованы из $B_L^\perp$ путем умножения слева на некоторую числовую матрицу μ подходящего размера с произвольными элементами. Таким образом, все множество решений уравнения (3) может быть записано в виде

$$(4) \quad X = \mu B_L^\perp, \quad \mu \neq 0.$$

Если матрица B полна по строкам (не имеет линейно зависимых строк), то говорят, что у нее левый делитель нуля не существует, либо равен нулю, а уравнение (3) нетривиально неразрешимо.

Симметричные утверждения справедливы и для матриц с неполным рангом по столбцам. У таких матриц всегда существуют правые делители нуля, в т.ч. максимального ранга.

Согласно приведенному критерию управляемости на основе ленточной матрицы (2) энергосистема (1) полностью управляема тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad \text{rank } C_{\text{band}} = (n - r + 1)(n - r).$$

Недостатком критерия (5) является повышенный размер матрицы (2) по сравнению с критерием управляемости Р. Калмана, в котором вычисляется ранг матрицы меньшего размера

$$(6) \quad \text{rank } C = \text{rank} \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-r}B \end{pmatrix} = n.$$

В следующем разделе работы на основе ленточного критерия описывается рекурсивный тест на управляемость энергосистемы (1), позволяющий существенно понизить вычислительные затраты на выяснение управляемости системы.

3 РЕКУРСИВНЫЙ ТЕСТ НА УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

Сформулируем следующий рекурсивный тест на управляемость энергосистемы (1).

Шаг 0. Определяется максимальное решение $B_L^\perp$ уравнения $B_L^\perp B = 0$. Если $B_L^\perp = 0$, то тест заканчивается⁴. Делается вывод об управляемости системы.

³ Заметим, что у матрицы (2) число строк всегда не превосходит числа столбцов, поскольку очевидно выполняется неравенство $n - r \leq n - 1$.

Шаг 1. Определяется максимальное решение $\begin{pmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \end{pmatrix}$ уравнения

$$(7) \quad \begin{pmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_L^\perp A \\ B_L^\perp \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} L_1^{(1)} \\ L_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема управляема).

Шаг 2. Определяется максимальное решение $\begin{pmatrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \end{pmatrix}$ уравнения

$$\begin{pmatrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2^{(1)} \\ L_1^{(1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} L_1^{(2)} \\ L_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема управляема).

Шаг k. Определяется максимальное решение $\begin{pmatrix} L_1^{(k)} \\ L_2^{(k)} \end{pmatrix}$ уравнения

$$(8) \quad \begin{pmatrix} L_1^{(k)} \\ L_2^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_2^{(k-1)} \\ L_1^{(k-1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} L_1^{(k)} \\ L_2^{(k)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема управляема).

Для управляемой системы тест закончится не позднее, чем на $(n-r+1)$ -м шаге. Кроме того, *критерием останова* рекурсивного теста на управляемость может служить неубывающий ранг матриц в последовательности

$$(9) \quad \begin{pmatrix} L_2^{(k-1)} \\ L_1^{(k-1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_2^{(k)} \\ L_1^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Заметим также, что в матрицах

$$B, \begin{pmatrix} B_L^\perp A \\ B_L^\perp \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L_2^{(1)} \\ L_1^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} L_2^{(k)} \\ L_1^{(k)} \end{pmatrix}, \dots$$

можно осуществлять любые перестановки строк, поскольку этот тип операций относится к эквивалентным преобразованиям [2].

4 РЕКУРСИВНЫЙ ТЕСТ НА НАБЛЮДАЕМОСТЬ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

В силу упоминавшейся ранее дуальности задач анализа управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем в данном разделе мы приведем без подробных комментариев ленточные критерии наблюдаемости и соответствующие им рекурсивные тесты на наблюдаемость.

Понятие наблюдаемости мы будем рассматривать в отношении энергосистемы (1) с вектором выхода $y(t) = Cx(t)$. Приведем ленточный критерий наблюдаемости [6, 7] и рекурсивный тест на наблюдаемость.

Критерий 2. Энергосистема (1) полностью наблюдаемая, если и только если ленточная матрица наблюдаемости

$$(10) \quad O_{\text{band}} = \begin{pmatrix} AC_R^\perp & C_R^\perp & 0 & \dots & 0 \\ 0 & AC_R^\perp & C_R^\perp & \dots & 0 \\ 0 & 0 & AC_R^\perp & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_R^\perp \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-m+1)(n-1) \times (n-m+1)(n-m)}$$

имеет полный ранг по столбцам [6].

⁴ Это утверждение непосредственно следует из критерия Р. Калмана и ленточного критерия. Во втором случае при равенстве нулю аннулятора ленточная матрица равна нулевой и всегда имеет максимальный ранг, который равен нулю.

Здесь $C_R^\wedge$ – *правый аннулятор* максимального ранга (*правый делитель нуля*) матрицы C , являющийся максимальным решением однородного алгебраического уравнения [1, 8]

$$(11) \quad CY = 0,$$

где $\text{rank } Y = n - m$.

Сформулируем следующий рекурсивный тест на наблюдаемость энергосистемы (1).

Шаг 0. Определяется максимальное решение $C_R^\wedge$ уравнения $CC_R^\perp = 0$. Если $C_R^\perp = 0$, то тест заканчивается. Делается вывод о наблюдаемости энергосистемы.

Шаг 1. Определяется максимальное решение уравнения

$$(AC_R^\perp \vdots C_R^\perp) \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ \vdots \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ \vdots \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема наблюдаема).

Шаг 2. Определяется максимальное решение уравнения

$$(R_2^{(1)} \vdots R_1^{(1)}) \begin{pmatrix} R_1^{(2)} \\ \vdots \\ R_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} R_1^{(2)} \\ \vdots \\ R_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема наблюдаема).

Шаг k. Определяется максимальное решение уравнения

$$(R_2^{(k-1)} \vdots R_1^{(k-1)}) \begin{pmatrix} R_1^{(k)} \\ \vdots \\ R_2^{(k)} \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\begin{pmatrix} R_1^{(k)} \\ \vdots \\ R_2^{(k)} \end{pmatrix} = 0$, то тест заканчивается (энергосистема наблюдаема).

По аналогии с тестом на управляемость критерием останова теста на наблюдаемость может служить неубывающий ранг матриц $(R_2^{(k-1)} \vdots R_1^{(k-1)})$, $(R_2^{(k)} \vdots R_1^{(k)})$.

5 АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЭНЕРГОСИСТЕМЫ

Определим с помощью разработанного теста наблюдаемость электроэнергетической системы, включающей две электростанции, работающие на общие шины потребителей. Модель энергосистемы задана параметрически [12]:

$$(12) \quad A = \begin{pmatrix} -G_1 M_1^{-1} & 0 & -M_1^{-1} & 0 & 0 & M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -G_2 M_2^{-1} & M_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^{-1} \\ T_{12} & -T_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_1 T_{g_1}^{-1} & 0 & 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2 T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{t_1}^{-1} & 0 & -T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{t_2}^{-1} & 0 & -T_{t_2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2D_2^{-1} & 0 & 2(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}) & -2D_2^{-1} \end{pmatrix},$$

$$(13) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном случае вектор состояния $x(t) \in \mathbb{R}^8$ включает следующие элементы: $x_1(t)$, $x_2(t)$ отклонение частоты тока первой и второй электростанций, соответственно, $x_3(t)$ – отклонение электрической мощности, $x_4(t)$, $x_5(t)$, $x_8(t)$ – сигналы регулирующих устройств электростанций, $x_6(t)$, $x_7(t)$ – отклонение механической мощности первой и второй электростанций, соответственно.

Шаг 0. Найдем правый делитель нуля $C_R^\perp$ матрицы (13):

$$(14) \quad C_R^\perp = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 5} \\ E_5 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поскольку (14) – ненулевая матрица, переходим к следующему шагу.

Шаг 1. Определяем максимальное решение уравнения

$$(15) \quad (AC_R^\perp \mid C_R^\perp) \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$(16) \quad AC_R^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_2^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -T_{g_2}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ T_{t_1}^{-1} & 0 & -T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & T_{t_2}^{-1} & 0 & -T_{t_2}^{-1} & 0 \\ 0 & -2D_2^{-1} & 0 & 2(D_2^{-1} + T_{t_2}^{-1}) & -2D_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Получим

$$(17) \quad \begin{pmatrix} R_1^{(1)} \\ R_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & T_{t_2} & D_2 + T_{t_2} \\ 0 & 0 & 0,5D_2 \\ -T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ -1 & -(D_2 T_{t_2}^{-1} + 0,5) & 0 \\ T_{t_1}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Так как решение (17) уравнения (15) нетривиально, переходим к шагу 2.

Шаг 2. Определяем максимальное решение уравнения

$$\begin{pmatrix} R_2^{(1)} & \vdots & R_1^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{(2)} \\ \vdots \\ R_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0,$$

матрицы $\begin{pmatrix} R_2^{(1)} & \vdots & R_1^{(1)} \end{pmatrix}$ определяем согласно разбиению в (17). Имеем

$$(18) \quad \begin{pmatrix} R_1^{(2)} \\ R_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -4T_{t_2}^2(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ (2D_2 + T_{t_2})D_2T_{t_2}(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} \\ \vdots \\ 2D_2T_{t_2}^2(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} \end{pmatrix} \neq 0,$$

$$2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2 \neq 0.$$

В силу (18) переходим к шагу 3.

Шаг 3. Определяем максимальное решение

$$(19) \quad \begin{pmatrix} R_2^{(2)} & \vdots & R_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{(3)} \\ \vdots \\ R_2^{(3)} \end{pmatrix} = 0,$$

где матрицы $\begin{pmatrix} R_2^{(2)} & \vdots & R_1^{(2)} \end{pmatrix}$ определяем согласно разбиению в (18).

Поскольку матрица

$$(20) \quad \begin{pmatrix} R_2^{(2)} & \vdots & R_1^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & (2D_2 + T_{t_2})D_2T_{t_2}(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -4T_{t_2}^2(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} & \vdots & 2D_2T_{t_2}^2(2D_2^2 + 5D_2T_{t_2} + 4T_{t_2}^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг по столбцам (для физических параметров $2D_2T_{t_2}^2(1 + 2T_{t_2}(2D_2 + T_{t_2})) \neq 0$), уравнение (19) имеет только нулевые (тривиальные) решения. Таким образом, исследуемая система (12), (13) является наблюдаемой.

Как показывает пример, к достоинствам рекурсивного теста можно отнести возможность дополнительного анализа условий наблюдаемости (по параметрам) на каждом шаге.

С другой стороны, можно убедиться, что анализ на наблюдаемость пары (12), (13) с помощью критерия наблюдаемости Калмана

$$\text{rank } \mathbf{O} = \text{rank} \begin{pmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^5 C^T \end{pmatrix}_{8 \times 18}$$

приводит к трудно обозримой задаче.

6 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАТРАТЫ

Проанализируем вычислительные затраты, необходимые для проверки управляемости системы на основе рекурсивного теста и критерия управляемости Р. Калмана.

Основные вычислительные затраты критерия управляемости Калмана определяются возведением в степень матрицы и вычислением ранга матрицы управляемости (6), реализованного в современных математических пакетах на основе сингулярного разложения матрицы [10]:

$$(21) \quad N_{Kalm} \approx 2(n-r-1)n^3 + 2n((n-r+1)r)^2 + 2((n-r+1)r)^3.$$

В общем случае оценку вычислительных затрат проверки управляемости системы с помощью рекурсивного теста произвести затруднительно вследствие существенной зависимости размеров матриц (9) и количества шагов теста от структуры системы. Однако

результаты проведенных численных экспериментов показывают, что при увеличении n и уменьшении разности $(n-r)$ общие вычислительные затраты стремятся к сумме затрат, обусловленных нахождением делителей нуля исходной матрицы B и матрицы в уравнении (7) первого шага. Таким образом, с учетом того, что в современных математических пакетах вычисление делителей нуля (нуль-пространств) матрицы реализовано с помощью экономного сингулярного разложения, мы можем записать [10]:

$$(22) \quad N_{recursive} \approx 6nr^2 + 11r^3 + 12(n-r)n^2 + 11r^3 = 12n^3 + 22r^3 + 6nr^2 - 12rn^2.$$

На рис. 1 приведены зависимости отношений числа операций $N_{Kalman}/N_{recursive}$ и r/n для матриц A и B элементы которых задавались случайными величинами из последовательности случайных величин, распределенных по нормальному закону для случаев $n = 50$, $n = 100$, и $n = 200$.

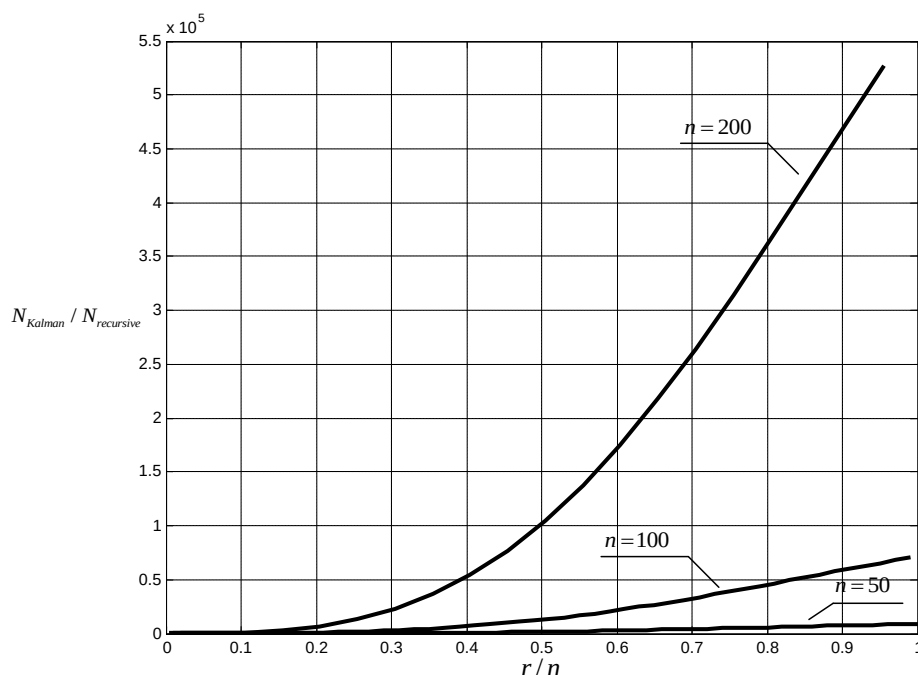


Рис. 1: Зависимость отношений числа операций $N_{Kalman}/N_{recursive}$ and r/n

На рис. 2 приведены графики зависимости требуемого машинного времени (CPU time) при использовании рекурсивного теста и критерия управляемости Калмана.

Анализ выражений (21), (22) и результатов вычислений, приведенных на рис. 1 и рис. 2, позволяет сделать вывод, что при увеличении размерности энергосистемы n и отношения r/n , рекурсивный тест на управляемость линейной стационарной системы позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

Оценка вычислительных затрат проверки наблюдаемости энергосистемы производится аналогично описанной выше методике.

7 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанные на основе ленточных критериев управляемости и наблюдаемости энергосистемы рекурсивные тесты имеют простой вид и легко реализуются в вычислительной среде. Данные тесты позволяют существенно снизить вычислительные затраты при определении управляемости и наблюдаемости с помощью ленточных критериев. В настоящее время ведутся работы по внедрению рекурсивных тестов для анализа управляемости и наблюдаемости объединенной электроэнергетической системы (ОЭС) Центра в темпе процесса в составе комплекса автоматизированной системы технологического управления (АСТУ) МЭС

Центра. Данные работы выполняются в качестве пилотного проекта по интеллектуальным сетям ОАО «ФСК ЕЭС».

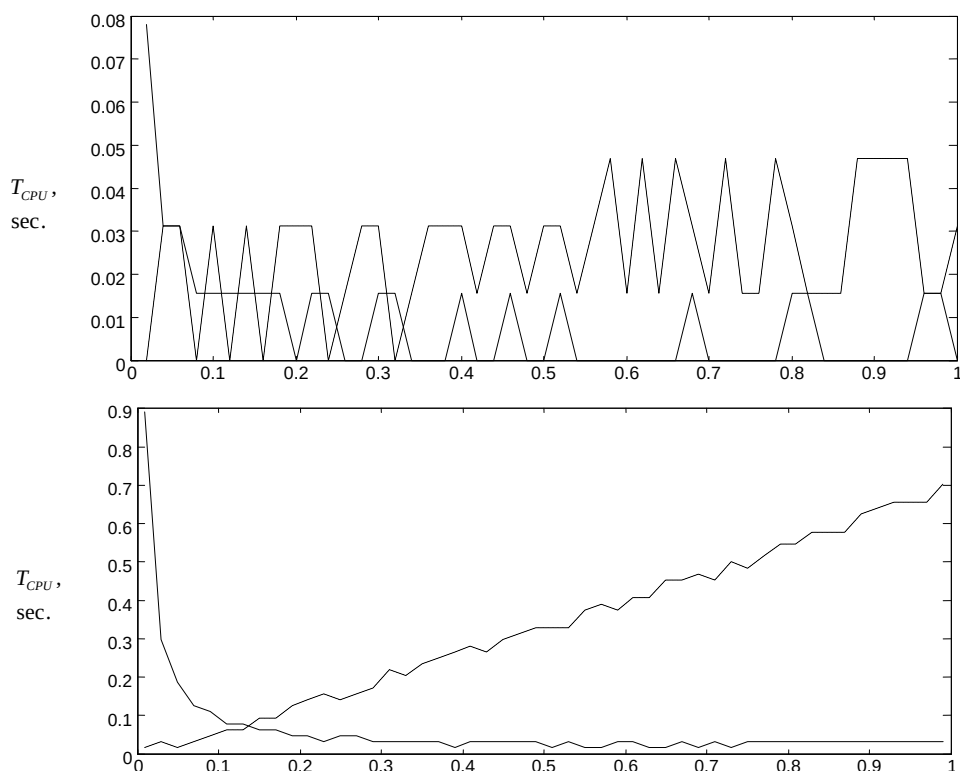


Рис. 2: Требуемое машинное время при использовании рекурсивного теста (непрерывная линия) и критерия управляемости Калмана (пунктирная линия)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Уонем М. Линейные многомерные системы управления: геометрический подход. М.: Наука, 1980.
- [2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1987.
- [3] Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
- [4] Kalman R.E. Contributions to the theory of optimal control // Bulletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. № 5. P. 102-119.
- [5] Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.
- [6] Мисриханов М.Ш. Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука, 2007.
- [7] Мисриханов М.Ш. Ленточные критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // АиТ. № 12. 2005.
- [8] Зыбин Е.Ю., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Минимальная параметризация решений линейных матричных уравнений // Современные методы управления многосвязными системами под ред. А.А. Красовского. Вып. 2. М.: Энергоатомиздат, 2003. С. 191-202.
- [9] Мисриханов М.Ш. Аналитический синтез инвариантных регуляторов // АиТ. № 11. 2005. С. 46-64.
- [10] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
- [11] Тауфер И. Решение граничных задач для систем линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1981.
- [12] Christensen G.S., El-Hawary M.E., Soliman S.A. Optimal Control Applications Electric Power Systems. Plenum Press. N.Y. and London. 1987.